1. Векторы и линейные операции над ними

Рассмотрим в пространстве две точки A и B. Они определяют отрезок AB.

Отрезок AB называется ***направленным***, если его концы A и B упорядочены; если при этом первой является точка A, а второй – точка B, то A – начало отрезка, а B – его конец. Направленный отрезок обозначается $\overrightarrow{OA}$ или $\overrightarrow{AB}$. На рисунке 1 направленный отрезок снабжен стрелкой на конце.

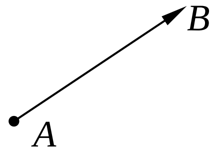


Рис. 1

Вектором (свободным вектором) называется направленный отрезок, который можно перемещать в пространстве параллельно самому себе. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

***Длиной* (*модулем*)** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***сонаправленными*** (обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если они лежат на параллельных прямых и направлены в одну сторону.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***противоположно направленными*** (обозначают $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если они лежат на параллельных прямых и направлены в разные стороны.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются ***противоположными***.

Каждую точку A пространства можно рассматривать как вектор с совпадающим началом и концом. Этот вектор обозначается $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ и называется ***нулевым*** вектором. Его длина считается равной нулю, а направление не определено.

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным. Обозначается $\vec{e}$.

Два вектора называются ***равными***, если они совмещаются параллельным переносом. Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. И обратно: если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.

Два ненулевых вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются ***коллинеарными*** (обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Три и более векторов называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости.

Для определенности любую тройку векторов, содержащую нулевой вектор, считают компланарной.

Углом между свободными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, на который необходимо повернуть вектор $\vec{a}$ так, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ стали коллинеарными сонаправленными векторами. Угол поворота против часовой стрелки считают положительным, в противном случае – отрицательным.

Два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ при $A \neq C$ называются ***равными***, если они:
– лежат на параллельных прямых;
– точки B и D лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точки A и C;
– имеют равные длины, т. е. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Линейные операции над векторами

Сложение векторов

Пусть заданы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$. Выберем в пространстве произвольную точку O и отложим от нее вектор $\vec{a}$. Получим вектор $\overrightarrow{OA}$. От точки A отложим вектор $\vec{b}$. Получим вектор $\overrightarrow{AB}$. Свободный вектор $\overrightarrow{OB}$ называется ***суммой*** свободных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) *правило треугольника* (рис. 2)

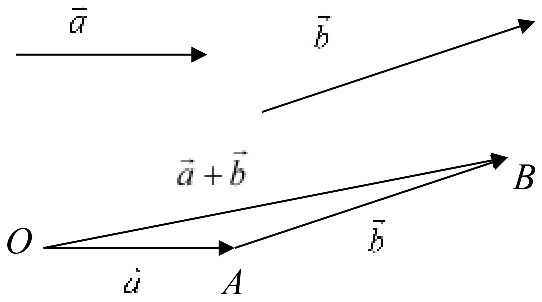


Рис. 2

2) *правило параллелограмма* (рис. 3)

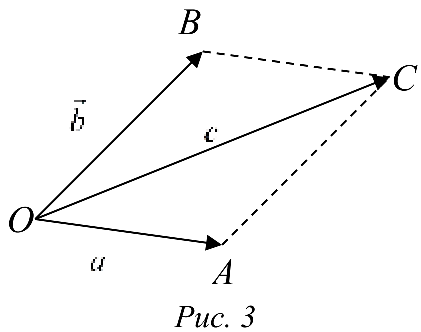


Рис. 3

3) *правило многоугольника* (рис. 4)

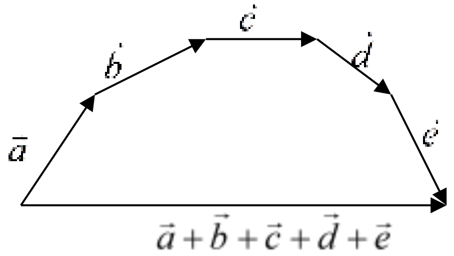


Рис. 4

Частный случай

Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то сумма векторов равна $\vec{0}$.

Свойства операции сложения:

1. Для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ верно равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).
2. Для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ верно равенство $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность).
3. Существует такой нулевой вектор $\vec{0}$, что для любого вектора $\vec{a}$ верно равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\left(-\vec{a}\right)$, для которого $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Вычитание векторов

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий равенству $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. Результирующий вектор разности направлен в сторону уменьшаемого вектора. В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, разность – это вторая диагональ параллелограмма (рис. 5).

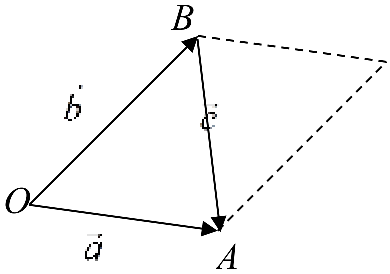


Рис. 5

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

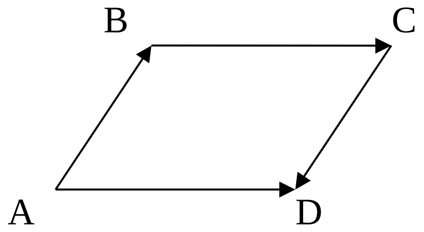
1. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$.
2. $\lambda>0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\lambda<0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Заметим, что в случае, когда $\lambda=0$, $|\lambda\vec{a}|=0$.

Свойства операции умножения вектора на число:

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
2. $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.
3. $\left(\lambda\mu\right)\vec{a}=\lambda\left(\mu\vec{a}\right)$.
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, где $\lambda,\ \mu\in R$, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные векторы.

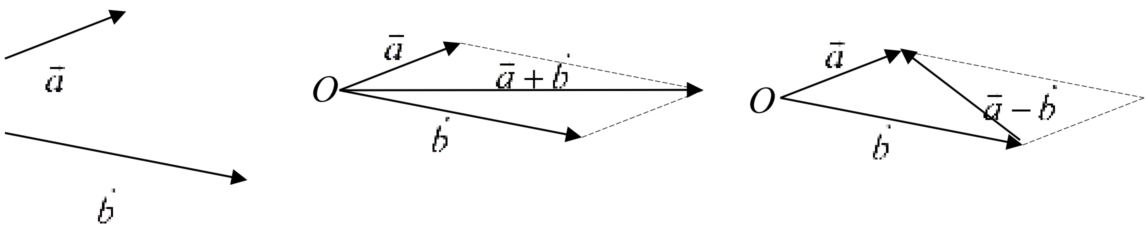
Пример 1. Пусть ABCD – параллелограмм. Указать среди векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ равные, противоположные, коллинеарные.



Решение. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, т. к. эти векторы равной длины и сонаправлены.
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, т. к. эти векторы равной длины и направлены в разные стороны.
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ – коллинеарные векторы.

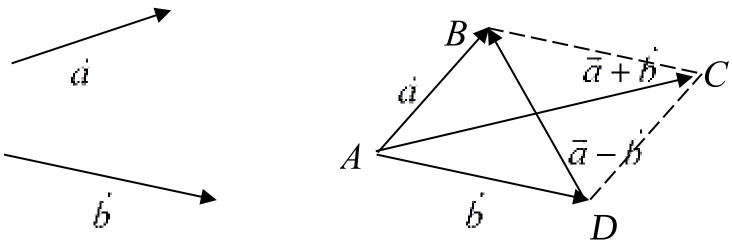
Пример 2. Заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$.

Решение.



Пример 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 60^0$, причем $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 8$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Решение.



Найти длину вектора $|\vec{a}+\vec{b}|$, значит, найти длину большей диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах. $AC = |\vec{a}+\vec{b}|$.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$: $AB = DC = |\vec{a}| = 5,$ $AD = BC = |\vec{b}| = 8,$ $\angle A = \angle C = 60^0$, $\angle B = \angle D = 120^0.$

Диагональ AC найдем по теореме косинусов:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\angle D$,

$AC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^0$,

$AC^2 = 64 + 25 + 80 \cdot \cos 60^0 = 89 + 80 \cdot \dfrac{1}{2} = 89 + 40 = 129,$

$AC = \sqrt{129}.$

Значит, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129}.$

Найти длину вектора $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, значит, найти длину меньшей диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах. $BD=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Диагональ BD найдем по теореме косинусов:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A,$

$BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos 60^0,$

$BD^2 = 25+64-80\cdot\cos 60^0 = 89-80\cdot\frac{1}{2} = 89-40 = 49,$

$BD = 7.$

Значит, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 7.$

2. Проекция вектора

Пусть вектор $\vec{a}$ составляет угол φ с осью l. ***Проекцией*** вектора на эту ось называется число (скаляр) $np_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$.

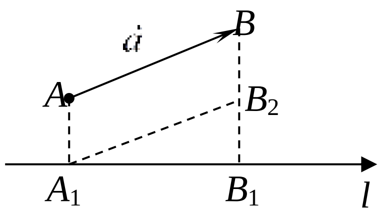


Рис. 6

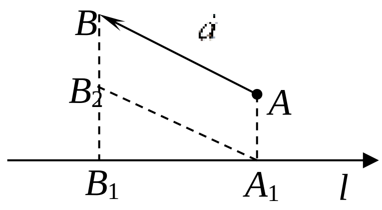


Рис. 7

Если угол φ острый (рис. 6), то проекция является положительной величиной, если угол φ тупой (рис. 7) – проекция отрицательна, если угол φ прямой – проекция равна нулю.

При ортогональной проекции угол между отрезками OA_0 и AA_0 прямой. Существуют проекции, у которых этот угол отличен от прямого.

Проекции векторов обладают следующими *свойствами*:

1. $np_l\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=np_l\vec{a}_1+np_l\vec{a}_2$ (проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов).

2. $np_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda np_l\vec{a}$ (проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на число).

Компонентной (составляющей) вектора $\vec{a}$ относительно оси l называется вектор $\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{A'B'}$ где A' – проекция начала вектора A, B' – проекция конца B на ось l.

Задания для решения в аудитории

1. Дан модуль вектора $\left|\vec{a}\right|=2$ и углы $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

3. Координаты вектора

Радиус-вектором точки M называется вектор, начало которого совпадает с началом координат, т. е. вектор $\overrightarrow{OM}$.

Координатами вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ называются координаты его конечной точки M.

R^2 : $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=(x;\ y)$ или $\vec{a}=\{x;\ y\}$.

R^3 : $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=(x;\ y;\ z)$ или $\vec{a}=\{x;\ y;\ z\}$.

Если вектор задан координатами начала $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, и конца $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ можно найти по формуле:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A) \tag{1}$$

Если векторы заданы координатами $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то операции над векторами выполняются по формулам:

1) $\lambda\neq 0 \Rightarrow \lambda\cdot\vec{a}=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$, при $\lambda\neq 0$;

2) $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_{\vec{a}}\pm x_{\vec{b}};\ y_{\vec{a}}\pm y_{\vec{b}};\ z_{\vec{a}}\pm z_{\vec{b}})$.

Длина (***модуль***) вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \tag{2}$$

В системе xOy векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ образуют ***базис двумерного пространства***, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы или орты (рис. 8). $\vec{i}\perp\vec{j}$; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$.

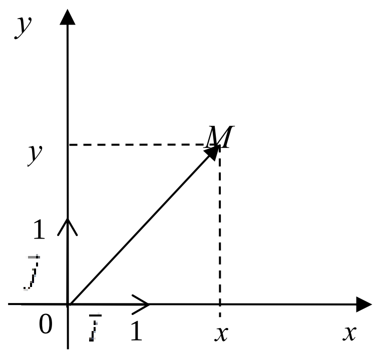


Рис. 8

В системе $xOyz$ векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ образуют ***базис трехмерного пространства***. Если базисные векторы попарно ортогональны, а длины их равны единице, то система координат называется ***ортонормированной***.

Базисные векторы ***правой ортонормированной системы координат*** обозначают $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ (рис. 9). $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$; $\vec{i}\perp\vec{j};\vec{j}\perp\vec{k};\vec{k}\perp\vec{i}$; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

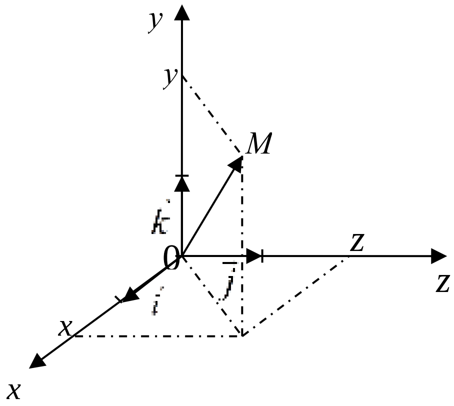


Рис. 9

Любой вектор $\overrightarrow{OM}$ можно разложить по базисным векторам:

R^2 : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$; (3)

$R^3 : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. (4)

Выражения (3) и (4) называются ***разложением вектора по координатному базису***.

$x \cdot \vec{i}$; $y \cdot \vec{j}$; $z \cdot \vec{k}$, называются ***компонентами вектора*** на соответствующие оси.

Пример 1. Найти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(1;\, 3;\, 2)$ и $B(5;\, 8;\, -1)$.

Решение. Проекциями вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат являются разности соответственных координат точек B и A: $a_x = 5 - 1 = 4$, $a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Пример 2. Даны координаты трех точек *A* (3; 0; –5), *B* (6; 2; 1), *C* (12; –12; 3). Требуется записать векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт, найти модули этих векторов и их сумму.

Решение. Для заданных точек $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\; y_2;\; z_2)$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ через орты $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ выражается следующим образом:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} .$$

Подставляя в эту формулу координаты точек *A* и *B*, имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (6-3)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1+5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} .$$

Подобным образом $\overrightarrow{AC} = (12-3)\vec{i} + (-12+0)\vec{j} + (3+5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}$.

Модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычисляется по формуле: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

Подставляя в формулу найденные ранее координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, находим их модули: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17$.

Чтобы найти сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ необходимо к координатам вектора $\overrightarrow{AB}$ прибавить координаты вектора $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: $\left(3+9,\ 2+(-12),\ 6+8\right)$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: $(12,\ -10,\ 14)$

Пример 3. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=(1,\ -3,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ -4,\ 2)$ и $\vec{c}=(-1,\ 1,\ 4)$

Решение. Воспользуемся формулой $np_{\bar{b}+\bar{c}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{b}+\bar{c}|}$.

Найдем $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=1(3-1)-3(-4+1)+4(2+4)=35$,

$|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(3-1)^2+(-4+1)^2+(2+4)^2}=7$.

Отсюда, $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}=5$.

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(5;9;7)$.

Решение. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(2+5;3+9;-1+7)=(7;12;6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d}=4\vec{p}+5\vec{q}$, если $\vec{p}=(4;5;-6)$, $\vec{q}=(8;2;1)$.

Решение. $4\vec{p}=(4\times4;5\times4;-6\times4)=(16;20;-24)$

$5\vec{q}=(8\times5;2\times5;1\times5)=(40;10;5)$

Тогда:

$\vec{d}=4\vec{p}+5\vec{q}=(16+40;20+10;-24+5)=(56;30;-19)$.

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})+\beta(\vec{a}-\vec{b})+\gamma(2\vec{b}+3\vec{c})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{a}-\beta\vec{b}+2\gamma\vec{b}+3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \alpha-\beta+2\gamma=1,\\ -2\alpha+3\gamma=1,\end{cases}\ \text{тогда}\ \ \alpha=\frac{2}{5};\ \beta=\frac{3}{5};\ \gamma=\frac{3}{5}\ \ \text{и}\ \ \vec{S}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{q}+\frac{3}{5}\vec{r}.$$

Задача 4. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$. Разложить вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC}=(7-1;6-7;5-0)=(6;-1;5)$

$\overrightarrow{BC}=(7-5;6-7;5-3)=(2;-1;2)$.

Вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=(6-2;\ -1-(-1);5-2)=(4;\ 0;\ 3)$.

Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+0+3^2}=\sqrt{25}=5$, следовательно,

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{3}{5}$, $\vec{a}^{\,0}\left\{\dfrac{4}{5};\ 0;\ \dfrac{3}{5}\right\}$.